Olimpiadas

DE FÍSICA

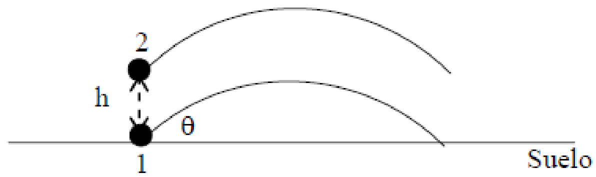
EuPhO

IPhO

SOCIEDAD ECUATORIANA DE FÍSICA

SOCIEDAD ECUATORIANA DE FÍSICA

Dos esferas pequeñas, numeradas 1 y 2, de masa m cada una, se lanzan al mismo tiempo, con la misma velocidad v y el mismo ángulo θ con la horizontal. La número 1 se lanza a nivel de un suelo horizontal y la 2 a una altura h en vertical sobre la anterior. Véase la figura inferior



Teniendo en cuenta que existe una fuerza de atracción gravitacional entre dichas esferas, además de la intensidad del campo gravitatorio debido a la Tierra, se pide calcular la disminución de distancia, medida en dirección vertical, entre las esferas δh, en el momento en que la 1 esté en el suelo. Para realizar los cálculos se admite que la distancia en vertical h en el trayecto se mantiene constante entre las dos esferas, debido a que $\delta h \ll h$. Realizar el cálculo cuando $v = 200$ m/s , $\theta = 30^o$,h=1 m y m=1 kg.

Dato G = $6{,}67.10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$

La esfera 1 en su trayectoria está sometida a la acción de dos fuerza verticales: una mg vertical y hacia abajo y $\frac{Gmm}{h^2}$ vertical y hacia arriba. La esfera 2 está sometida a la fuerza vertical hacia abajo mg y a la atracción gravitatoria $\frac{Gmm}{h^2}$ vertical y hacia abajo.

Para resolver el problema, a la condición del enunciado hay que unir que el tiempo de vuelo no es el mismo para las dos esferas al no estar sometidas a la misma fuerza, por tanto, no se mantienen una encima de la otra sino que existe una pequeña desviación que también despreciamos.

Ecuaciones paramétricas de la esfera 1.

$$x_1 = v\cos\theta \cdot t \; ; \; y_1 = v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}\left(g - \frac{Gm}{h^2}\right)t^2 = v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}g_1\,t^2$$

Designamos con d la distancia entre el punto de salida de la esfera 1 y el punto de impacto en el suelo, se cumple que $y_1=0$

$$v\,\mathrm{sen}\theta = \frac{1}{2}g_1\,t \Rightarrow \quad t = \frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g_1} \;\Rightarrow\quad d = v\cos\theta \cdot \frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g_1}$$

Las ecuaciones paramétricas de la esfera 2 son:

$$x_2 = v\cos\theta \cdot t \; ; \; y_2 = h + v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}\left(g + \frac{Gm}{h^2}\right)t^2 = h + v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}g_2\,t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = h + v\,\mathrm{sen}\theta \cdot \frac{x_2}{v\cos\theta} - \frac{1}{2}g_2\left(\frac{x_2}{v\cos\theta}\right)^2$$

Cuando la esfera 1 está en el suelo la 2 está encima pero a una distancia menor que h. Las abscisas de las dos esferas son iguales cuando la 1 está en tierra y podemos escribir

$$v\cos\theta\frac{2\,v\,\text{sen}\theta}{g_1} = v\cos\theta\cdot t \Rightarrow \quad t = \frac{2\,v\,\text{sen}\theta}{g_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = h + v\,\text{sen}\theta\frac{d}{v\cos\theta} - \frac{1}{2}g_2\left(\frac{d}{v\cos\theta}\right)^2$$

El término δh es:

$$\delta h = y_2 - h = v\,\text{sen}\theta\frac{d}{v\cos\theta} - \frac{1}{2}g_2\left(\frac{d}{v\cos\theta}\right)^2 = d\,\text{tag}\,\theta - \frac{1}{2}g_2\frac{d^2}{v^2\cos^2\theta}$$

Sustituimos el valor de d

$$\delta h = \frac{2v^2\text{sen}\,\theta\cos\theta}{g_1}\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{2}g_2\frac{4\,v^4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}{g_1^2 v^2\cos^2\theta} = \frac{2\,v^2\text{sen}^2\theta}{g_1} - 2\,v^2\text{sen}^2\theta\frac{g_2}{g_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta h = 2\,v^2\text{sen}^2\theta\left(\frac{1}{g_1} - \frac{g_2}{g_1^2}\right) = 2\,v^2\text{sen}^2\theta\left(\frac{g_1 - g_2}{g_1^2}\right) = 2\,v^2\text{sen}^2\theta\left(\frac{g - G\frac{m}{h^2} - \left(g + G\frac{m}{h^2}\right)}{\left(g + G\frac{m}{h^2}\right)^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta h \approx 2\,v^2\text{sen}^2\theta\left(\frac{-2G\frac{m}{h^2}}{g^2}\right) = -\frac{4\,v^2\text{sen}^2\theta}{g^2h^2}G\,m$$

Alternativa.

Podemos considerar con las aproximaciones del enunciado como si la fuerza de interacción gravitatoria entre ellas actuase un tiempo igual al empleado por la bola 1 en llegar al suelo desplazándose con la aceleración g .

$$t = \frac{2\,v\,\text{sen}\theta}{g}$$

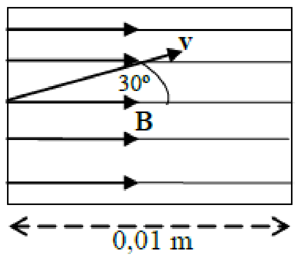
La aceleración de acercamiento entre las esferas es: $a = \frac{\frac{G\,m\,m}{h^2}}{m} = \frac{G\,m}{h^2}$

La distancia δh es:

$$\delta h = 2\cdot\frac{1}{2}a\,t^2 = \frac{G\,m}{h^2}\left(\frac{2\,v\,\text{sen}\theta}{g}\right)^2 = G\,m\frac{4\,v^2\text{sen}^2\theta}{g^2\,h^2}$$

$$\delta h = \frac{6{,}67.10^{-11}\cdot 1\cdot 4\cdot 200^2\cdot\text{sen}^2 30}{9{,}8^2\cdot 1^2} = 2{,}8.10^{-8}\,m$$

En el plano YZ existe un campo magnético uniforme B=0,2 T, cuya longitud medida sobre el eje Y es 0,01 m. Una sección de ese campo se observa en la figura inferior.

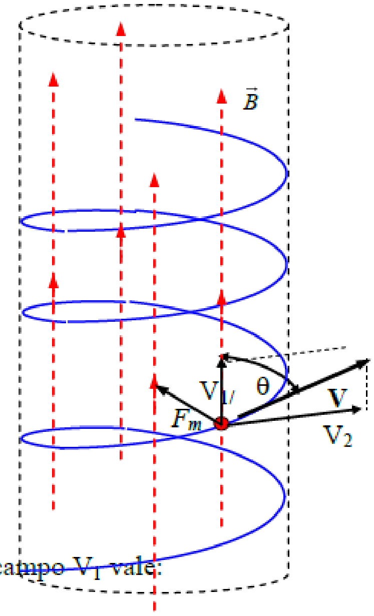


El electrón penetra en el campo con una velocidad constante $v = 2{,}0.10^{6}$ m/s formando un ángulo de 30º con el vector campo. Calcular el número de vueltas que efectúa el electrón durante su travesía a través del campo.

Datos . Carga del electrón $e = -1{,}6.10^{-19}$ C, masa del electrón $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg

La fuerza que actúa sobre una carga que se mueve en un campo magnético obedece a la ecuación. $\vec{F}_m = e\,\vec{v} \times \vec{B}$

La velocidad del electrón tiene dos componentes una según la dirección y sentido del campo magnético de módulo V_1= V cos 30° y otra en dirección perpendicular al campo de módulo V_2 = V sen 30°. El movimiento del electrón se debe a dos movimientos: uno de avance con velocidad V_1 (m.r.u. porque al ser esta componente paralela al campo B, el producto vectorial de V_1 por B, es nulo y no hay fuerza en esta dirección) y otro movimiento describiendo círculos de radio R, debido a la interacción entre la componente de la velocidad V_2 y el campo. El conjunto simultáneo de los dos movimientos es una espiral hacia la salida del campo, porque su eje tiene la dirección del campo B.



El tiempo de movimiento debido a la componente en la dirección del campo V_1 vale:

$$\tau_1 = \frac{0{,}01}{v.\cos 30°}$$

La interacción entre la componente de la velocidad V_2 y el campo que son perpendiculares nos proporciona la fuerza centrípeta capaz de cambiar la dirección del vector velocidad, cuyo módulo vale

$$e v_2 B = \frac{m\,v_2^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m v_2}{e B}$$

El tiempo que emplea el electrón en describir la circunferencia de radio R es:

$$\tau_2 = \frac{2\pi R}{v_2} = \frac{2\pi \frac{m\,v_2}{e B}}{v_2} = \frac{2\pi m}{e B}$$

Designamos con n al número de vueltas que efectúa el electrón:

$$n\,\tau_2 = \tau_1 \Rightarrow n = \frac{\frac{0{,}01}{v\cos 30°}}{\frac{2\pi m}{e B}} = \frac{0{,}01 e B}{2\pi m\, v\cos 30°} = \frac{0{,}01 \cdot 1{,}6.10^{-19} \cdot 0{,}2}{2\pi 9{,}1.10^{-31} \cdot 2{,}0.10^{6} \cdot \cos 30} = 32{,}3$$

En el modelo clásico del átomo de hidrógeno, el electrón gira en una circunferencia alrededor del núcleo de forma semejante a como se desplaza la Tierra alrededor del Sol, excepto que la fuerza de atracción entre electrón y núcleo es eléctrica. Dado que el electrón está acelerado, emite radiación electromagnética cuya potencia está dada por la ecuación:

$$P = \frac{e^2 a^2}{6 \pi \varepsilon_o c^3}$$

e es la carga elemental de electricidad $e = 1,6.10^{-19}$ ***C, a es la aceleración del electrón en su órbita, c es la velocidad de la luz*** $c = 3,0.10^{8}$ ***m/s,***

$\varepsilon_o = 8,85.10^{-12}\ C^2 N^{-1}\ m^{-2}$***. El radio del electrón es*** $R = 5,0.10^{-11}$ ***m y su masa*** $m = 9,1.10^{-31}$ ***kg.***

Calcular:

a) El valor de P y de la energía cinética del electrón

b) Admitiendo de forma aproximada que el tiempo en que el electrón pierde su energía es t=E/P, determinar la vida de un átomo de hidrógeno.

a) El electrón está acelerado porque describe una órbita circular con velocidad constante y esa aceleración es la denominada centrípeta. La fuerza de atracción eléctrica entre el electrón y el protón del núcleo proporciona la fuerza centrípeta que el electrón necesita para girar.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{R^2} = ma \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{mR^2} \Rightarrow P = \frac{e^2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{mR^2}\right)^2}{6\pi\varepsilon_o c^3} = \frac{e^6}{6\pi\varepsilon_o c^3\left[(4\pi\varepsilon_o)mR^2\right]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_o^3 c^3 m^2 R^4} = \frac{\left(1{,}6.10^{-19}\right)^6 \cdot}{96\pi^3\left(8{,}85.10^{-12}\cdot 3{,}0.10^8\right)^3\left(9{,}1.10^{-31}\right)^2\left(5{,}0.10^{-11}\right)^4} =$$

$$= \frac{1{,}6^6}{96\pi^3\cdot 26{,}55^3\cdot 9{,}1^2\cdot 5^4}\cdot\frac{10^{-114}}{10^{-36}\cdot 10^{24}\cdot 10^{-62}\cdot 10^{-44}} = 5.819.10^{-12}\cdot 10^4 = 5{,}819.10^{-8}\text{ W}$$

La aceleración a es la centrípeta y vale

$$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = aR \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2 R}{mR^2}} = e\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o mR}} \Rightarrow$$

$$v = 1{,}6.10^{-19}\sqrt{\frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85.10^{-12}\cdot 9{,}1.10^{-31}\cdot 5.10^{-11}}} = 2{,}25.10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Como la velocidad es unas 133 veces menor que la de la luz, utilizamos para la energía cinética la expresión clásica y no la relativista.

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}9{,}1.10^{-31}\cdot\left(2{,}25.10^6\right)^2 = 2{,}30.10^{-18}\text{ J}$$

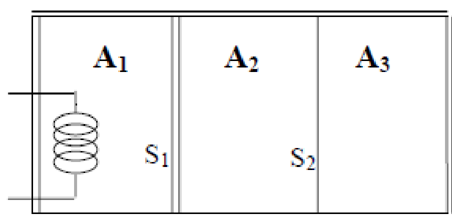
b)

$$t = \frac{E_c}{P} = \frac{2{,}30.10^{-18}}{5{,}819.10^{-8}} = 4{,}0.10^{-11}\text{s}$$

Considerar un cilindro cerrado cuyas paredes son adiabáticas. El cil colocado horizontalmente y está dividido en tres compartimentos (A_1 separados por dos pistones S_1 y S_2. Ambos pueden desplazarse a lo l cilindro sin rozamiento. El pistón S_1 es adiabático y el S_2 conductor del ca uno de los compartimentos contiene un mol de gas ideal a P_o ; V_o y T_o si 3/2 R y C_p =5/2 R, γ=5/3.

En el compartimento A_1 existe un dispositivo que comunica calor al gas a muy lenta con lo que se consigue que el gas del compartimento A_3 adq temperatura de $9T_o/4$.

a) Determinar las coordenadas termodinámicas de cada gas.
b) El trabajo y el calor realizado durante el proceso
c) Los cambios de entropía



a) Cuando se suministra calor al gas de A_1 de forma extraordinariamente lenta, el proceso es reversible termodinámicamente. Se suministra una cantidad de calor infinitamente pequeña y el gas de A_1 cambia de la misma manera sus variables termodinámicas, el ligero aumento de la presión desplaza el embolo S_1 a la derecha y a su vez s y a continuación se desplaza el embolo

S_2. De forma reversible se ejerce trabajo del gas de A_1 al de A_2 y y éste al de A_3. En consecuencia el gas de A_1 cambia, en un proceso infinitamente lento sus variables termodinámicas a $P_1 = P_2$, V_1 y T_1, y el gas dos a P_2, V_2 y $T_2 = 9To/4$, que a su vez adquiere esas variables el gas de A_3.
A efectos de resolver el problema el pistón S_2 se limita separa los gases los cuales se encuentran siempre en equilibrio termodinámico (tienen la misma presión, el mismo volumen y la misma temperatura), En definitiva consideramos que A_1 es un volumen inicial V_o, con un mol de gas, inicialmente a la presión Po y temperatura To y al final a la presión P_2, V_2 y temperatura 9To/4.

Dado que A_2 y A_3 se encuentran rodeadas de paredes adiabáticas, escribimos para el proceso de cambio de A_2, la ecuación de la transformación adiabática $T V^{\gamma-1} = Cte$.

$$T_o V_o^{\gamma-1} = \frac{9T_o}{4} V_2^{\gamma-1} \Rightarrow V_2^{\gamma-1} = \frac{4}{9} \cdot V_o^{\gamma-1} \Rightarrow V_2 = V_o \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_o \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\,V_o}{27}$$

Aplicamos la ecuación de los gases ideales

$$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_2 \frac{8\,V_o}{27}}{\frac{9}{4} T_o} \Rightarrow \quad P_2 = P_o \frac{\frac{9}{4}}{\frac{8}{27}} = P_o \frac{243}{32}$$

Si observamos la figura del enunciado cuando ocurre la transformación el volumen total no cambia

$$V_1 + 2V_2 = 3V_o \Rightarrow V_1 = 3\,V_o - 2\frac{8\,V_o}{27} = V_o\left(3 - \frac{16}{27}\right) = V_o \frac{65}{27}$$

Aplicamos la ecuación de los gases al gas de A_1.

$$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{\frac{243}{32} P_o \cdot \frac{65 V_o}{27}}{T_1} \Rightarrow \quad T_1 = T_o \frac{243}{32} \cdot \frac{65}{27} = T_o \frac{9 \cdot 65}{32} = T_o \frac{585}{32}$$

b) Aplicamos la primera ley de la termodinámica a los gases de A_2 y A_3.

$$\Delta U = 2.C_V\left(\frac{9T_o}{4} - T_o\right) = W \Rightarrow \quad W = 2\cdot\frac{3}{2}R\frac{5T_0}{4} = \frac{15RT_o}{4} = \frac{15P_oT_o}{4}$$

El trabajo es positivo ya que se suministra desde el exterior (esto es desde A_1)
Este trabajo lo hace el gas A_1 y, por tanto, su valor es negativo. Aplicamos la primera ley de la Termodinámica al gas A_1.

$$\Delta U = 1\cdot C_v\left(\frac{585}{32}T_o - T_o\right) = Q + W = Q - \frac{15RT_o}{4} \Rightarrow \; Q = RT_o\left(\frac{1755}{64} + \frac{15}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q = RT_o\left(\frac{1755+240}{64}\right) = \frac{1995}{64}P_oV_o$$

c) Cambio de entropía para el gas A_1

$$\Delta S_1 = C_V \ln\frac{T_o\frac{585}{32}}{T_o} + R\ln\frac{T_o\frac{65}{27}}{T_o} = \frac{3}{2}8{,}31\cdot 2{,}906 + 8{,}31\cdot 0{,}879 = 43{,}5\ \frac{J}{K}$$